

# Matematika Mérnököknek 2.

Baran Ágnes, Burai Pál, Noszály Csaba

## Gyakorlat Fourier transzformáció

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

# Fourier transzformáció

## Példa

Határozzuk meg a következő függvény Fourier transzformáltját!

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**Megoldás:** Tudjuk, hogy

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \quad \text{és} \quad e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x),$$

továbbá a cos páros, a sin páratlan függvény, így

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x).$$

Ebből

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\omega x) dx - i \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} \sin(\omega x) dx}_{=0}$$
$$= 2 \int_0^{1/2} \cos(\omega x) dx = 2 \left[ \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right]_{x=0}^{1/2} = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Tehát

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

# Fourier transzformáció

## 1. feladat

Határozzuk meg a következő függvények Fourier transzformáltját!

$$① f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$② f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$③ f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$④ f(x) = e^{-|x|},$$

$$⑤ f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

# Fourier transzformáció

## Példa.

Határozzuk meg a következő függvény Fourier transzformáltját!

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [2, 3] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**Megoldás.** Számolhatunk a definíció alapján, de használhatjuk az alábbi összefüggést is:

ha az  $f$  Fourier-transzformáltja  $F$ , akkor

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0} F(\omega).$$

Tudjuk, hogy ha

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

akkor

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Mivel  $f(x) = g\left(x - \frac{5}{2}\right)$ , ezért

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\omega) &= \mathcal{F}\left[g\left(x - \frac{5}{2}\right)\right](\omega) = e^{-\frac{5}{2}i\omega} \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \left(\cos\frac{5\omega}{2} - i\sin\frac{5\omega}{2}\right) \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

## 2. feladat

Határozzuk meg a következő függvény Fourier transzformáltját!

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ 1, & \text{ha } x \in ]0, 1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

# Fourier transzformáció

## Példa.

Ha tudjuk, hogy az  $f(x) = e^{-|x|}$  függvény Fourier transzformáltja  $\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ , akkor határozzuk meg a  $g(x) = e^{-|2x+3|}$  Fourier transzformáltját.

**Megoldás.** Ha az  $f$  Fourier-transzformáltja  $F$  és  $a \neq 0$ , akkor

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\omega) = e^{-i\omega x_0} F(\omega) \text{ és } \mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right](\omega) = |a|\mathcal{F}[f](a\omega).$$

Most  $g(x) = h(2x)$ , ahol  $h(x) = e^{-|x+3|} = f(x + 3)$ , így

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \mathcal{F}[h(2x)](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[h]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f(x + 3)]\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}i\omega}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}i\omega}\frac{2}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = e^{\frac{3}{2}i\omega}\frac{4}{4 + \omega^2}.\end{aligned}$$

# Fourier transzformáció

## 3. feladat

Határozza meg az alábbi függvények Fourier transzformáltját.

①  $g(x) = e^{-|1-x|}$

③  $g(x) = 2e^{-|3x-1|} - e^{-|x+2|}$

②  $g(x) = 5e^{-|\frac{x}{3}-2|}$

## 4. feladat

Határozza meg a  $g$  függvény Fourier transzformáltját, ha tudjuk, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

függvény Fourier transzformáltja  $F(\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ .

$$g(x) = \begin{cases} e^{4x}, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

# Fourier transzformáció

## Példa.

Határozzuk meg a  $g$  függvény Fourier transzformáltját, ha tudjuk, hogy az  $f$  Fourier transzformáltja  $F(\omega) = \frac{2}{\omega^2}(1 - \cos(\omega))$ . Ábrázoljuk közös ábrán az  $f$  és  $g$  függvényeket, egy másik ábrán a Fourier transzformáltakat.

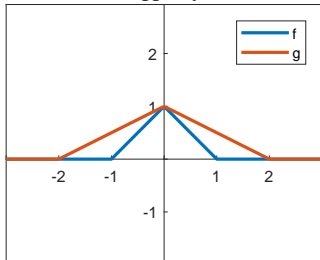
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{ha } x \in [-1, 0] \\ 1 - x, & \text{ha } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{2}, & \text{ha } x \in [-2, 0] \\ 1 - \frac{x}{2}, & \text{ha } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

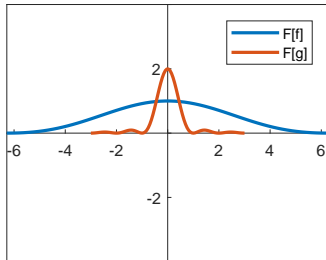
## Megoldás.

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right](\omega) = 2\mathcal{F}[f](2\omega) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(2\omega)).$$

A függvények



A Fourier transzformáltak



Lassan változó jel  $\rightarrow$  keskeny frekvenciaspektrum

Gyorsan változó jel  $\rightarrow$  széles frekvenciaspektrum

# Fourier transzformáció

## 5. feladat

Legyen  $a, b > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  adott és  $f$  az  $x_0 - \frac{b}{2}$  ponttól az  $x_0 + \frac{b}{2}$  pontig terjedő  $a$  magasságú téglalap alakú impulzus. Határozzuk meg a Fourier transzformáltját a paraméterek függvényében! Hogyan változik a transzformált, ha változtatjuk a paramétereket?

## 6. feladat

Tudjuk, hogy  $\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ . Mi lesz a Fourier transzformáltja a következő függvényeknek?

- $f(x) = 3e^{-2(x-3)^2}$ ,
- $g(x) = e^{-x^2+2x}$ ,

Minek a Fourier transzformáltja  $F(\omega) = 3e^{-2(\omega-3)^2}$  ?

# Fourier transzformáció

## Példa

Számítsuk ki Matlab segítségével az  $f(x) = e^{-|x|}$  Fourier transzformáltját, majd ábrázoljuk a függvényt és a transzformáltat.

**Megoldás:** A `fourier` parancs segítségével számítsuk ki a Fourier transzformáltat!

```
>> syms x
>> f = exp(-abs(x));
>> F = fourier(f)
F =
  2/(w^2 + 1)
```

Láthatjuk, hogy a korábban kiszámolt

$$F(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

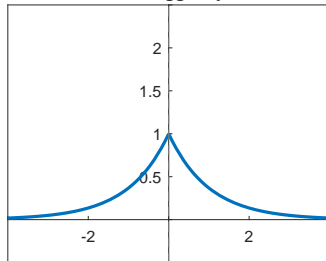
függvényt kaptuk.

Ábrázoljuk a függvényt és a transzformáltat!

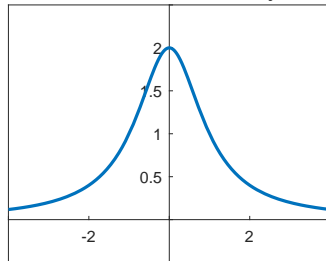
```
figure;  
set(gcf, 'units', 'points', 'position', [20,20,600,200])  
subplot(1,2,1)  
fplot(f, 'LineWidth', 2); axis([-4,4,-.5,2.5]);  
title('Az f függvény');  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';  
subplot(1,2,2)  
fplot(F, 'LineWidth', 2); axis([-4,4,-.5,2.5]);  
title('Az f Fourier transzformáltja');  
ax=gca;  
ax.XAxisLocation = 'origin';  
ax.YAxisLocation = 'origin';
```

# Fourier transzformáció

Az  $f$  függvény



Az  $f$  Fourier transzformáltja



# Fourier transzformáció

## 7. feladat

Határozzuk meg Matlab segítségével az 1. feladatban szereplő függvények Fourier transzformáltját! Ábrázoljuk a függvényt, illetve egy másik ábrán a transzformált valós és képzetes részét!

# Fourier transzformáció

## Példa

Számítsuk ki Matlab segítségével az  $F(x) = e^{-x^2}$  inverz Fourier transzformáltját, majd ábrázoljuk a függvényt és a transzformáltat egy ábrán.

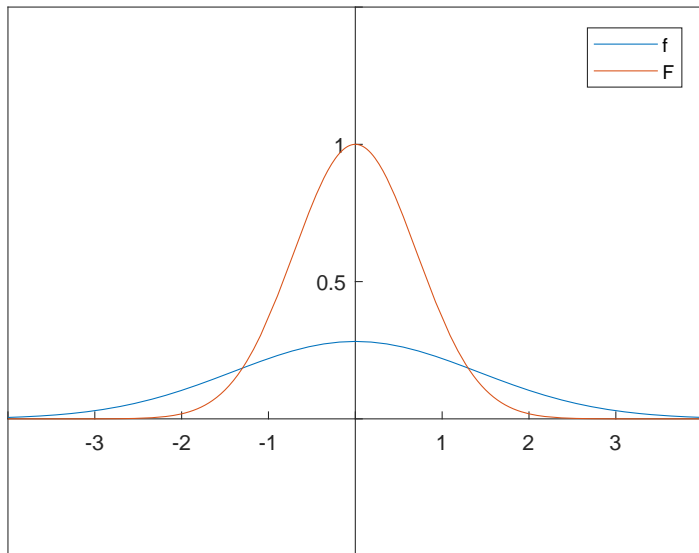
**Megoldás:** Az `ifourier` parancs segítségével számítsuk ki az inverz Fourier transzformáltat!

```
>> syms t x
>> F = exp(-(x)^2);
>> f = ifourier(F,x,t)
```

Ábrázoljuk a függvényt és a transzformáltat közös ábrán közös ábrán!

```
>> fplot([f F])
>> legend('f','F');
>> axis([-4,4,-.5,1.5])
>> ax = gca;
>> ax.XAxisLocation = 'origin'; ax.YAxisLocation = 'origin';
```

# Fourier transzformáció



# Diszkrét Fourier transzformáció (*DFT*)

## Példa

Határozzuk meg az  $x = [2, 3, -1, 1]$  4-pontú jel *DFT*-jét kézzel!

**Megoldás:**

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

azaz

$$F_k = \sum_{n=0}^3 f_n e^{-i\frac{2\pi}{4}kn}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Így

$$F_0 = 2 + 3 - 1 + 1 = 5, \quad F_1 = 2 + 3e^{-i\frac{2\pi}{4}} - e^{-i\frac{2\pi}{4}} + e^{-i\frac{2\pi}{4}} = 3 - 2i,$$

$$F_2 = 2 + 3e^{-i\frac{2\pi}{4}2} - e^{-i\frac{2\pi}{4}2} + e^{-i\frac{2\pi}{4}2} = -3, \quad F_4 = \dots = 3 + 2i.$$

# DFT

## 1. feladat

Határozzuk meg a következő vektorok *DFT*-jét! Írjuk fel a megoldást mátrixos alakban is!

- $x = [20, 5]$ ;
- $x = [3, 2, 5, 1]$ .

## 2. feladat

- Egy 9-pontú jel *DFT*-jének páros koordinátái a következők

$$[3.1, 2.5 + 4.6i, -1.7 + 5.2i, 9.3 + 6.3i, 5.5 - 8i]$$

Határozza meg a hiányzó koordinátákat!

- Pótolja a következő *DFT* hiányzó adatait:

$$[1 - 0i, ?, 3 + 1i, 4 - 1i, 1 - 0i, ?, ?, 2 - 2i]$$

## 3. feladat

- Egy  $x$  jel  $DFT$ -je

$$X = [10, -2 + 2i, -2, -2 - 2i]$$

Számolja ki az  $y(t) = x(t + 1)$  jel  $DFT$ -jét! Ellenőrizze a megoldást géppel is.

# Inverz Diszkrét Fourier transzformáció (IDFT)

## Példa

Határozzuk meg az  $x = [5, 3 - 2i, -3, 3 + 2i]$  4-pontú jel Inverz Diszkrét Fourier transzformáltját kézzel!

**Megoldás:**

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{i \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

azaz

$$f_k = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 F_n e^{i \frac{2\pi}{4} kn}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Így

$$f_0 = \frac{1}{4}(5+3-2i-3+3+2i) = 2, \quad f_1 = \frac{1}{4}(5+(3-2i)e^{i\frac{2\pi}{4}} - 3e^{i\frac{2\pi}{4}} + (3+2i)e^{i\frac{2\pi}{4}}) = 3,$$
$$f_2 = \dots = -1, \quad f_3 = \dots = 1.$$

## 1. feladat

Határozzuk meg a következő vektorok Inverz Diszkrét Fourier transzformáltját! Írjuk fel a megoldást mátrixos alakban is!

- $x = [2, 3, -1, 1]$ ;
- $x = [5, 3 - 2i, -3, 3 + 2i]$ .

## 2. feladat

Kérjük le Matlabban az `fft` és az `ifft` parancsok helpjét. Ellenőrizzük a korábbi megoldásaink helyességét Matlabbal!

## Példa

- Szorozzunk össze polinomot!

$$p(x) = 3x^4 - 2x^2 - x + 5$$

$$q(x) = x^3 - 2x - 2$$

$$p(x)q(x) = ?$$

## Példa

### Megoldás:

- Kézzel:

$$3x^7 - 8x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 8x - 10$$

- a conv parancsot használva:

```
>> p=[5, -1, -2, 0, 3]; q=[-2, -2, 0, 1]; conv(p, q)
ans =
-10 -8 6 9 -7 -8 0 3
```

- a fft, ifft parancsokkal:

```
>> Q=fft([q, [0, 0, 0, 0]]);
>> P=fft([p, [0, 0, 0]]);
>> ifft(P.* Q)
ans =
-10 -8 6 9 -7 -8 0 3
```

# DFT vegyes

## 1. Feladat

Határozzuk meg Matlabbal a

$$x^{20000} + x^{19999} + \dots + x^2 + x + 1$$

polinom négyzetét! Hasonlítsuk össze a conv és az fft alapú megoldások futási idejét!

## 2. Feladat

Határozzuk meg Matlabbal a

$$10^{20} + 10^{19} + \dots + 10 + 1 = 111\dots111$$

szám négyzetét!

## Példa

Vegyünk egy 7 elemű egyenletes mintát az  $f(t) = 2\sin(t) + \cos(2t)$  függvényre a  $[0, 2\pi]$  intervallumon. Vizsgáljuk meg a DFT és az  $f$  kapcsolatát!

```
>> N=7; t=(0:(N-1))*2*pi/N;  
>> f=@(t) 2*sin(t)+cos(2*t);  
>> x=f(t); X=fft(x)  
X = 0.00000 + 0.00000i  
-0.00000 - 7.00000i  
3.50000 - 0.00000i  
0.00000 - 0.00000i  
0.00000 + 0.00000i  
3.50000 + 0.00000i  
-0.00000 + 7.00000i
```